

2020

MATHEMATICS

[GENERAL]

Paper : IV

Full Marks : 100

Time : 3 Hours

*The figures in the right-hand margin indicate marks.**Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.**Notations and Symbols have their usual meanings.*

দক্ষিণ প্রান্তস্থ সংখ্যা নম্বর নির্দেশ করিবে।

পরীক্ষার্থীদের যথাসম্ভব নিজের ভাষায় উত্তর দিতে হইবে।

চিহ্ন ও প্রতীকসমূহ প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত।

1. Answer any **ten** questions: $2 \times 10 = 20$

যে-কোনো দশটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

i) Show that the vectors (3, 0, 2), (7, 0, 9) and (4, 1, 2) are linearly independent.

দেখাও যে (3, 0, 2), (7, 0, 9) এবং (4, 1, 2) ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে অনধীন।

ii) Define extreme point of a convex set. Give an example of a convex set having exactly three extreme points.

উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংজ্ঞা দাও। তিনটি প্রান্তিক বিন্দু আছে এমন একটি উত্তল সেটের উদাহরণ দাও।

iii) Examine whether the set $X = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > 4\}$ is a convex set. $X = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > 4\}$ সেটটি উত্তল সেট কিনা পরীক্ষা কর।

iv) Reduce the following Linear Programming Problem to its canonical form:

নিম্নলিখিত রৈখিক বিধিবদ্ধ সমস্যাটিকে উহার আদর্শ আকারে পরিবর্তিত কর :

Minimize $Z = x_1 - x_2 + x_3$

subject to

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -3$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$2x_1 - x_2 \geq -4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

v) State the Fundamental Theorem of Linear Programming Problem.

রৈখিক বিধিবদ্ধ সমস্যার মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত কর।

vi) Show that $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3$ is a feasible solution of the following system of equations:

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$8x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Examine whether the solution is basic solution or not.

[Turn over]

দেখাও যে, নিম্নলিখিত শৃঙ্খলাবদ্ধ সমীকরণসমূহের একটি সম্ভাব্য সমাধান $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$8x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

এই সম্ভাব্য সমাধানটি কি মূল সমাধান হইবে?

vii) What do you mean by 'Maximin and Minimax' Principle?

'Maximin ও Minimax' নীতি বলিতে কি বোঝ?

viii) What do you mean by strategy of a player in Game Theory?

ক্রীড়াতে কোন খেলোয়াড়ের রণকৌশল বলিতে কি বোঝ?

ix) A particle moves in a straight line so that its distance s from a fixed point at time t is proportional to t^n . If v be the velocity and f be the acceleration at any time t , then show that $(n-1)v^2 = nfs$.

সরলরেখায় গতিশীল কোন কণার গতিপথের উপর কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে t সময়ে উহার দূরত্ব s , t^n -এর সহিত সমানুপাতিক। যদি t সময়ে বেগ v এবং ত্বরণ f হয় তবে প্রমাণ কর যে $(n-1)v^2 = nfs$ ।

x) The speed v of a particle moving along the x -axis is given by $v^2 = 16 - x^2$. Prove that the motion is an SHM and find its amplitude.

যদি $v^2 = 16 - x^2$ হয়, যেখানে v হল x -অক্ষ বরাবর চলমান কোন বস্তুকণার বেগ, তবে প্রমাণ কর যে গতিটি SHM এবং ইহার বিস্তার নির্ণয় কর।

xi) The law of motion of a body moving along a straight line is $x = \frac{1}{2}vt$; x being its distance from a fixed point at time t and v its velocity there. Prove that it moves with constant acceleration.

সরলরেখা বরাবর গতিশীল কোন বস্তুর গতির সূত্র $x = \frac{1}{2}vt$; যেখানে x হল একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে t সময়ে বস্তুর দূরত্ব এবং v হল ঐ স্থানে বস্তুর বেগ। প্রমাণ কর বস্তুটি সমত্বরণে গতিশীল।

xii) Show that the rate of change of kinetic energy of a particle is equal to its power.

দেখাও যে, কোন বস্তুকণার গতিশক্তির পরিবর্তনের হার উহার ক্ষমতার সমান।

xiii) A particle moves along a circle with constant speed. Prove that its angular velocity about any point of the circle is half that of about the centre.

প্রমাণ কর যে, একটি বস্তুকণা সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে চলমান হইলে, বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুর চারিদিকে উহার কৌণিক বেগ, কেন্দ্রের চারিদিকে কৌণিক বেগের অর্ধেকের সমান।

xiv) Two perfectly elastic spheres of equal mass moving in the same direction collide directly. Show that they interchange their velocities.

দুটি সমভর বিশিষ্ট সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক গোলক একই দিকে গতিশীল হইয়া সরাসরি ধাক্কা খায়। দেখাও যে গোলকদ্বয় গতিবেগ বিনিময় করিবে।

xv) Define 'Areal velocity'.

সংজ্ঞা দাও : 'Areal velocity'।

xvi) If the tangential and normal components of accelerations of a particle moving along a plane curve are equal; find the velocity of the particle.

একটি সামতলিক বক্ররেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণার ত্বরণের স্পর্শক উপাংশ এবং অভিলম্ব উপাংশ সমান হইলে; বস্তুকণাটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

GROUP-A

(Module-VII)

Answer any **five** questions:

8×5=40

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2. a) Represent graphically all the constraints of the following Linear Programming Problem:

নিম্নে প্রদত্ত রৈখিক বিধিবদ্ধ সমস্যাটির সকল আরোপিত শর্তসমূহকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপিত কর :

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Hence find the extreme points of the feasible region and maximum value of the objective function.

অতঃপর সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চলের প্রান্তিক বিন্দুগুলি এবং উদ্দিষ্ট অপেক্ষকের গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

b) Show that $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 1$ is a feasible solution of the system of equations

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Using this feasible solution, obtain a basic feasible solution. $4+4=8$

দেখাও যে $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 1$ হইলে নিম্নলিখিত শৃঙ্খলাবদ্ধ সমীকরণসমূহের একটি সম্ভাব্য সমাধান

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 &= 18 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

এই সম্ভাব্য সমাধানটি ব্যবহার করিয়া একটি মূল সম্ভাব্য সমাধান বাহির কর।

3. a) Prove that the dual of a dual of a primal is the primal problem itself in Linear Programming Problem.

প্রমাণ কর যে LPPতে মৌলিক সমস্যার দ্বৈত সমস্যাটির দ্বৈত হইবে মৌলিক সমস্যাটিই।

- b) Verify the above theorem for the LPP given below: $4+4=8$

নিম্নে প্রদত্ত LPP-র জন্য উপরোক্ত উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর :

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z &= -6x_1 - 8x_2 + 10x_3 \\ \text{subject to } x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 - x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. a) Solve the following Linear Programming Problem using Big M-Charnes method.

Big M-Charnes পদ্ধতি দ্বারা নিম্নলিখিত LPP-র সমাধান করঃ

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to } x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- b) The solution of a Transportation Problem is never unbounded— is the statement true? Justify your answer.

কোন পরিবহন সমস্যার সমাধান কখনও অসীম হইবে না— বক্তব্যটি কি সত্য? তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও। $6+2=8$

5. Solve the following Transportation Problem using VAM: 8

VAM পদ্ধতি প্রয়োগ করিয়া নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সমাধান কর :

	W_1	W_2	W_3	W_4	a_i
F_1	19	30	50	10	7
F_2	70	30	40	60	9
F_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

6. a) Find the optimal assignment to find the minimum cost for the following cost matrix:

নিম্নলিখিত ব্যয়বিন্যাসে সর্বনিম্ন চূড়ান্ত assignment এবং সর্বনিম্ন ব্যয় নির্ণয় কর :

	A	B	C	D
1	18	26	17	11
2	13	28	14	26
3	38	19	18	15
4	19	26	24	10

- b) State the necessary and sufficient condition that both the Primal and Dual have finite optimal solution in Linear Programming Problem. $6+2=8$

কোন রৈখিক বিধিবদ্ধ সমস্যার মূল (Primal) এবং দ্বৈত (Dual) উভয় সমস্যারই সসীম উদ্দিষ্ট সমাধান থাকিবার আবশ্যিক (necessary) ও পর্যাপ্ত (sufficient) শর্তটি উল্লেখ কর।

7. Define optimal value of an objective function. In an LPP, if objective function assumes its optimal value at more than one extreme point, then every convex combination of these extreme points also gives the optimal value of the objective function—prove it. $2+6$

উদ্দিষ্ট অপেক্ষকের সম্ভাব্য শ্রেষ্ঠ মানের সংজ্ঞা দাও। কোন LPP তে যদি উদ্দিষ্ট অপেক্ষক একাধিক প্রান্তিক বিন্দুতে সম্ভাব্য শ্রেষ্ঠ মান অর্জন করে, তবে ঐ প্রান্তিক বিন্দুদের উত্তল সমবায় বিন্দুতেও উদ্দিষ্ট অপেক্ষকটি সম্ভাব্য শ্রেষ্ঠ মান প্রদান করে।

8. a) Prove that a balanced Transportation Problem has at least one optimal solution.

প্রমাণ কর যে, কোন সুযম পরিবহন সমস্যার অন্ততঃ একটি সম্ভব শ্রেষ্ঠ সমাধান থাকিবে।

- b) Solve the following 2×2 Game using mixed strategy: $3+5=8$

মিশ্র কৌশল অবলম্বনে নিম্নলিখিত 2×2 ক্রীড়া সমস্যার সমাধান কর :

		B	
		B ₁	B ₂
A	A ₁	8	5
	A ₂	4	7

9. a) If a fixed number λ is added to each element of a pay-off matrix, then prove that the optimal strategies remain unchanged while the value of the game is increased by λ .

যদি মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স-এর প্রত্যেক উপাদানের সহিত একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা λ যোগ করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, সম্ভব-শ্রেষ্ঠ ক্রীড়া-কৌশল অপরিবর্তিত থাকিবে যদিও ক্রীড়ার মূল্য λ পরিমাণ বৃদ্ধি পাইবে।

- b) Find the saddle point and value of the game when the pay-off matrix of a two-person-zero-sum game for the payer A is given below: $4+4=8$

অশোপবেশন বিন্দু ও ক্রীড়ার মূল্য নির্ণয় কর, যখন কোন দ্বি-ব্যক্তি-শূন্য-সমষ্টি ক্রীড়ার প্রথম খেলোয়াড় A-এর জন্য

প্রদত্ত মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সটি নিম্নরূপ :

	B		
A	15	2	3
	6	5	7
	-7	4	0

GROUP-B
(Module-VIII)

Answer any **five** questions:

8×5=40

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

10. a) A particle moves along a straight line according to the law $s^2 = 11t^2 + 7t + 9$. Prove that the acceleration varies as $\frac{1}{s^3}$.

সরলরেখায় গতিশীল কোন বস্তুকণার গতিসূত্র $s^2 = 11t^2 + 7t + 9$ । প্রমাণ কর যে কণাটির ত্বরণ $\frac{1}{s^3}$ -এর সহিত সমানুপাতিক।

- b) For a particle moving down over a smooth inclined plane under gravity alone, prove that the sum of K.E. and P.E. of the particle at any point of the inclined plane is constant.

4+4=8

m ভর বিশিষ্ট একটি বস্তুকণা অভিকর্ষজ বলের দ্বারা একটি মসৃণ আনত তলের নিম্নদিকে গতিশীল। প্রমাণ কর যে, ঐ তলের উপর যে কোন বিন্দুতে কণাটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল ধ্রুবক।

11. a) A particle of mass m moves in a straight line under an acceleration mn^2x towards a fixed point O on the line, where x is distance of the particle from O at any time t. Show

that if $x = a$, $\dot{x} = u$ when $t = 0$ then at time t , $x = a \cos nt + \frac{u}{n} \sin nt$.

সরলরেখায় গতিশীল m ভরবিশিষ্ট একটি কণা ঐ সরলরেখার উপর O স্থির বিন্দুর দিকে mn^2x ত্বরণে ধাবমান। t সময়ে O বিন্দু হইতে বস্তু কণাটির দূরত্ব x । যদি $t = 0$ হইলে $x = a$, $\dot{x} = u$ হয়, তবে দেখাও যে

$$t \text{ সময়ে } x = a \cos nt + \frac{u}{n} \sin nt \text{।}$$

- b) State the principle of conservation of energy.
6+2=8

শক্তি সংরক্ষণের নীতিটি বিবৃত কর।

12. Obtain the components of velocity and acceleration of a particle moving along a plane in polar co-ordinates along radial and transverse directions.

মেরু স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে সমতলে গতিশীল একটি বস্তুকণার বেগ ও ত্বরণের দূরক উপাংশ (radial) এবং লম্ব-উপাংশ (transverse) নির্ণয় কর। 8

13. Two perfectly inelastic bodies of masses m_1 and m_2 moving with velocities u_1 and u_2 in the same direction collide directly. Show that the loss of kinetic energy due to this collision is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2. \quad 8$$

m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট দুটি সম্পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক বস্তু একই দিকে u_1 এবং u_2 গতিবেগে গতিশীল হইয়া সোজাসুজি ধাক্কা

খেল। দেখাও যে এই ধাক্কার জন্য গতিশক্তির হ্রাসের পরিমাণ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2 \text{।}$$

14. a) A particle is moving in a straight line with an acceleration k^2x towards a fixed point on it in a medium which offers a small resistance $\mu \frac{dx}{dt}$. Show that the particle executes a harmonic motion when $\mu^2 < 4k^2$. Also find its time period.

একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখা বরাবর ঐ সরলরেখার উপর নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে k^2x ত্বরণে গতিশীল এবং একই সঙ্গে উহার উপর একটি ক্ষুদ্র রোধ বল $\mu \frac{dx}{dt}$ কাজ করে। যখন $\mu^2 < 4k^2$ দেখাও যে কণাটির গতি সরল সুসামঞ্জস্য হবে। সেক্ষেত্রে পর্যায়কাল কত হবে?

- b) What is the work done by gravity on a mass of m gm. during t^{th} second of its fall?

$$6+2=8$$

অবাধে পতনশীল m গ্রাম ভরের একটি কণার t -তম সেকেন্ডে অভিকর্ষ দ্বারা কার্যের পরিমাণ কত?

15. a) Using usual notations, prove that
প্রচলিত চিহ্ন ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2 u^2}.$$

- b) Prove that at an apse a particle is moving at right angles to the radius vector.

প্রমাণ কর যে, apse বিন্দুতে বস্তুকণার গতিপথ মেরুরেখার সহিত উলম্ব। 6+2=8

16. a) A particle is moving in a straight line subject to a resistance kv^3 where v is velocity and k is a constant. Show that the velocity v is given in terms of distance s by the equation

$$v = \frac{u}{1 + ksu}; \text{ where } u \text{ is the initial velocity.}$$

সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণা kv^3 পরিমাণ বাধা প্রাপ্ত যেখানে v উহার গতিবেগ এবং k একটি ধ্রুবক। দেখাও যে s -এর সাপেক্ষে উহার বেগ v নিম্নলিখিত

সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় : $v = \frac{u}{1 + ksu}$, যেখানে

u প্রারম্ভিক বেগ।

- b) A particle describes a circle of radius 'a' with a uniform speed v . Show that the radial and transverse accelerations are

$$\left(-v^2/a\right)\cos\theta \text{ and } \left(-v^2/a\right)\sin\theta \text{ respectively.}$$

একটি বস্তুকণা 'a' ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে গতিশীল। দেখাও যে উহার ত্বরণের দূরক উপাংশ এবং লম্ব উপাংশ যথাক্রমে $\left(-v^2/a\right)\cos\theta$ এবং

$$\left(-v^2/a\right)\sin\theta \text{।} \quad 4+4=8$$

17. a) A particle moves under a force which is always directed towards a fixed point and is equal to $\mu \div (\text{distance})^2$ per unit mass. Show that the path described by the particle is a conic and discuss the cases that may arise.

একটি বস্তুকণা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে একটি বলের অধীনে গতিশীল যাহা প্রতি একক ভরে $\mu \div (\text{দূরত্ব})^2$ এর সঙ্গে সমান। দেখাও যে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি বক্র (conic) এবং উহার সম্ভাব্য পরিস্থিতিগুলো আলোচনা করো।

- b) State Newton's laws of universal gravitation.

নিউটনের universal gravitation-এর সূত্রটি বিবৃত কর।

$$6+2=8$$
